Çağman, N., *Bulanık mantık*, Bilim ve Teknik, Sayı:463, Sayfa:50-51, Haziran 2006

BULANIK MANTIK

Naim Çağman, ncagman@gop.edu.tr

Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Tokat.

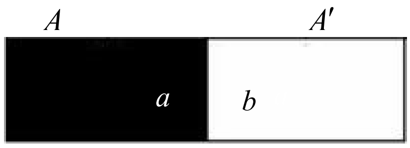
Matematik deyince ilk akla gelen kesinliktir. Halbuki günlük hayatta konuşmalarımız arasında belirsizlik içeren, orta yaşlı insan, uzun zaman, pahalı araba, yüksek bina gibi anlamı kişiden kişiye ve duruma göre değişen çok kelimeler kullanılır. Klasik mantığın tanımlayamadığı bu tür belirsizlikler çoğunlukla bilimsel olmayan bir şey olarak kabul görmesine rağmen, 19. yüzyılın başlarında bu tür belirsizlikler üzerine bir çok filozof kafa yormuşlardır. Einstein bu durumu şu şekilde ifade etmiştir: "Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir". 1920'lerde Heisenberg ortaya ilk belirsizlik kavramını atarak bilimi çok değerliliğe zorlamıştır. 1930'ların başlarında Lukasiewicz ilk üç-değerli mantık sistemini ve aynı dönemlerde kuantum filozofu Black'da sürekli değerlere sahip mantığı tanımladı. Pek az batılı filozof çok değerliliği benimsemesine rağmen, Lukasiewicz, Gödel ve Black, ilk çok değerli mantık ve kümeler üzerine teorik olarak çalışmalarını sürdürdüler, ancak kendilerine bir uygulama alanı bulamadılar. Belirsizliğin, modern anlamda matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir dönüm noktası, 1965'te California Berkeley Üniversitesi'nden Azeri kökenli Amerikalı Matematikçi Lütfi Askerzade Zadeh'in bulanık mantık (fuzzy logic) ve dolayısıyla bulanık küme teorisini tanımlamasıyla başlamıştır.

Zadeh bu teorisinde, matematiğin, dil ve insan zekasını ilişkilendirebileceğini ve bulanık mantığın gerçek hayatın daha iyi bir modelini oluşturduğunu göstermesine rağmen bilim camiasından pek ilgi görmediği gibi tenkitlerle karşılanmış ve hatta ABD Ulusal Bilim Vakfı (National Science Foundation) tarafından kaynakların boşa harcanmasına örnek olarak gösterilmişti. 1972 yılında İngiltere'de İran kökenli Ebrahim Mamdani'nin bir buhar makinesi için, bulanık mantık teorisini kullanarak, bir kontrol edici tasarlaması dünyanın ilgisini bu konuya çekmiştir. Bulanık mantığın ilk ticari uygulamasının, 1980'de, Danimarka'da bir çimento fabrikasının kontrolünde kullanılmasından sonra, başta Japonya olmak üzere dünyadaki çoğu ülkeler araştırma ve mühendislik uygulamalarıyla bu konuda büyük gelişmeler kat etmişlerdir. Özellikle, elektronik aletlerin ana yapılarını oluşturan transistor veya algoritmalar gibi anahtarlama araçlarında yoğun olarak bulanık mantık kullanılır.

Bulanık mantık ve bulanık kümeleri, klasik mantık (Aristo mantığı) ve onun doğurduğu klasik kümeler ile beraber vermemiz aralarındaki farkı görme ve karşılaştırabilme açısından kolaylık sağlayacaktır. Bilindiği gibi, klasik mantık, yanlış veya doğrundan biri ile betimlenen ve kesin hüküm belirten "Üç ikiden büyük bir tamsayıdır.", "Ahmet kırk yaşındadır." gibi önerme dediğimiz ifadelerle çalışır. Bir x değişkene bağlı, $p(x)$ ="x ikiden büyük bir tamsayıdır.", $q(x)$ ="x kırk yaşındadır." gibi önermelere de açık önermeler denir. Bu önemelerle matematiğin temel taşlarından biri olan kümeleri inşa ederiz. Kitaplarda, klasik kümelere, "iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur" denir. Önermeler kesin hüküm belirttiği için, bir açık önermeyi doğru yapan değişkenler iyi tanımlanmış olurlar ve bunların tonluluğu matematikte küme olarak tanımlanır. Örneğin, $p(x)$ açık önermesinin yani ikiden büyük bütün tamsayıların oluşturduğu bir küme, $A=\{x\colon p(x)\}$ biçiminde veya açık olarak $A=\{x\colon x>2,\ x\in \square\}$ biçiminde veya daha açık olarak A={3,4,5, …} biçiminde yazılır.

Klasik mantıkta, önermeler ya doğrudur yada yanlıştır, üçün bir alternatifleri yoktur. Bu nedenle, bir $p(x)$ önermesi ve onun olumsuzu (değili) $\neg p(x)$ önermeleri için $p(x)\wedge \neg p(x)$ ve $p(x)\vee \neg p(x)$ bileşik önermelerine sırasıyla çelişki (kesin yanlış) ve totoloji (kesin doğru) denir. Birincinin manası, bir önerme aynı anda hem yanlış hem de doğru olamaz ve ikincinin manası ise bir önerme ya yanlıştır ya da doğrudur. O halde, bir $p(x)$ önermesini doğru yapan değerler bir A kümesini oluşturuyorsa, doğru yapmayanlar (yanlış yapanlar) da bu A kümesinin tümleyeni A' kümesini oluştururlar. Böylece bir küme, üzerinde işlem yapılan E evrensel kümenin elemanlarını, kümeye ait olanlar ve ait olmayanlar diye ikiye böler. Bu net ayırımdan dolayı, E evrensel kümesinde tanımlı herhangi bir A kümesi için

$A \cup A' = E$ ve $A \cap A' = \varnothing$ eşitlikleri elde edilir. Bu durumun venn şeması Şekil 1'de verilmiştir; burada *A* siyah ve tümleyeni beyaz bölgeden ibarettir. Kesin olarak $a \in A$ *ve* $b \notin A$. Görüldüğü gibi klasik mantığın doğurduğu kümeler, tabiattakinin aksine, yaşadığımız dünyayı siyah/beyaz, doğru/yanlış, iyi/kötü gibi kategorize ederek ikiye bölen birbirine zıt ikili kavramlarla inşa edilir.



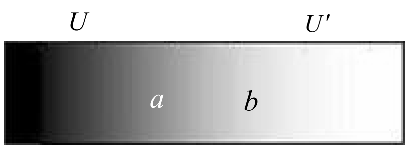
Şekil 1. Klasik Küme

Klasik mantıkta bir önermenin doğruluk değeri, doğrular için 1 ve yanlışlar için 0 kullanılırsa, *E* evrensel kümesindeki bir *A* kümesi, matematiksel olarak $\chi_A : E \to \{0,1\}$ fonksiyonuyla karakterize edilir. Burada, *A* kümesine ait elemanlara 1 değerini, ait olmayan elemanlara ise 0 değerini veren, χ_A fonksiyonuna *A* kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Bu sayede, bilgisayar tarafından algılanabilir, Boolean cebrinin temeli olan ikili sayı sistemine geçiş yapılmış olunur.

Halbuki, gerçek dünya hiç de öyle siyah ve beyazdan ibaret değildir, orada siyah ile beyazın arasında, Şekil 2'de olduğu gibi, sonsuz renk tonu vardır. Konuşma dilinde ifade edilen ve üzerinde çalıştığımız çoğu sınıflandırmalarda kullandığımız, kesin sınırlarla tanımlanamayan ve kişiden kişiye farklı yorumlanan "çok güzel", "fazla uzun", "aşırı sıcak", "hafif pahalı", "biraz tatlı" gibi bulanık kavramlar klasik mantığın öngördüğü şekilde incelenemezler. İşte bu tür terimlerle ifade edilen "Ayşe çok güzel.", "Hava aşırı sıcak.", "Amcam epeyce yaşlı." gibi ifadeleri, kesin hüküm belirtmediğinden, klasik mantık önerme olarak kabul etmez ve bu kavramlarla da klasik manada küme tanımlanamaz. İşte, bu tür önermelere *bulanık önermeler* ve bunlarla uğraşan mantığa da *bulanık mantık* denir.

Bulanık önermelerin doğruluğu veya yanlışlığı hakkında kesin bir şey söylenemeyeceğinden dolayı bunların doğruluk değeri, $[0,1]=\{x:0 \le x \le 1, x \in \mathbb{R}\}$ gerçel sayılar kümesinden, bir sayıyla derecelendirilir. Bir bulanık önerme derecesine göre hem doğru ve hem de yanlış olabilir. Bulanık bir önerme için "doğru değildir" denmiş ise bu "yanlıştır" anlamına gelmez. Bir önerme 0.8 derecesinde doğru ise aynı önerme 0.2 derecesinde de yanlıştır. Örneğin, "Ayşe çirkindir" önermesi 0.5 derecesinde doğru ise aynı derecede de yanlıştır. Anlaşılacağı gibi, klasik önermelerdeki çelişme ve totoloji burada geçerli değildir. Bu özellikten dolayı, klasik mantıkta problem olan *paradokslar*, hem "doğru" hem "yanlış", ya da ne "doğru" ne de "yanlış" doğruluk değerine sahip önermeler, bulanık mantıkta doğruluk değerleri alarak birazda olsa doğrulara indirgenmiş olurlar.

Bulanık önermeleri oluşturan bulanık terimlerin her biri bir *bulanık küme* ile modellenir. O halde, bir bulanık önermenin oluşturduğu bir bulanık küme, çalışma yapılan alana ait her bir bireye matematiksel olarak kümedeki aitlik derecesini temsil eden [0,1] aralığındaki gerçel sayılardan bir değer atayarak tanımlanır. Bu değer, elemanın bulanık küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini ifade eder.



Şekil 2. Bulanık Küme

Şekil 2'de de görüldüğü gibi, siyahla betimlenen bulanık bir *U* kümesinin sınırları, klasik kümelerde olduğu gibi, kesin çizgilerle belirlenemez. Çünkü artık burada, siyah-beyaz kriterler, gri olanlarıyla değiştiriliyor ve karşımıza bulanık bir küme kavramını otaya çıkıyor. Elemanların aidiyeti keskin sınırları olmayan bulanık yapı içinde kalıyor ve burada gözüken *a* ve *b* elemanları farklı tonlardaki gri bölgelerde bulunduklarından farklı derecelerde U ve tümleyeni U' kümesine ait oluyorlar.

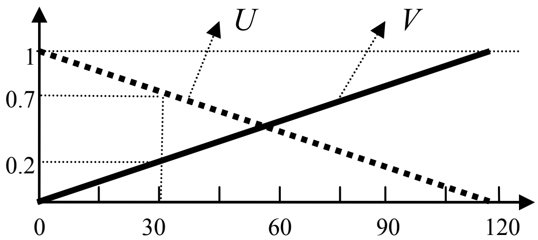
Tam üye olma ve üye olmama durumu, bulanık kümede de sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Dolayısıyla, klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir halidir. Bu nedenle, bulanık kümelerin matematiksel olarak ifadesi, klasik kümelerin karakteristik fonksiyonunun $\{0,1\}$ değer kümesinin, $[0,1]$ gerçel sayılar aralığına genelleştirilmesiyle yapılır. Buradan, bulanık kümelerin klasik kümelere bir alternatif değil, onların genelleştirilmişi olduğu görülür. Nasıl ki, Rasyonel sayıların keşfi tam sayılara alternatif değil, onu da kapsayan daha işlevli bir sayı kümesi, bulanık kümeler de klasik kümeleri kapsayan daha geniş kümelerdir.

Matematiksel olarak, E evrensel kümesindeki bir bulanık U kümesi $\mu_U(x):E\to[0,1]$ şeklinde karakterize edilir. Buradaki μ_U fonksiyona bulanık U kümesinin üyelik fonksiyonu denir. Bulanık U kümesi, E deki her elemanın üyelik derecesiyle birlikte oluşturduğu ikililer kümesidir.

$$U=\{(x,\mu_U(x)) : x\in E, \mu_U(x)\in[0,1]\} \qquad \textbf{(1)}$$

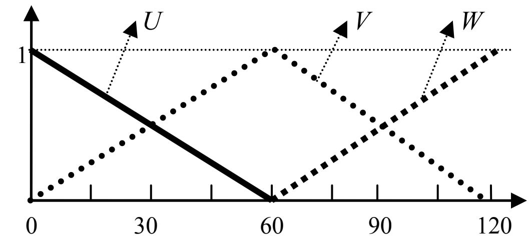
burada $\mu_U(x)$ değeri x'in U kümesine üyelik (aitlik) derecesini gösterir. Üyelik fonksiyonları bir çok farklı şekillerde tanımlanabilirler. Üyelik fonksiyonlarının inşası kişilerin görüş ve değer yargılarına dayanır. Bu nedenle bu fonksiyonlar kişiden kişiye ve duruma göre değişmektedir.

Bulanık kümeler, kesin çizgilerle gösterilemeyeceğinden, venn şema gösterimlerinden söz edilemez ve bunun yerine bulanık kümeler üyelik fonksiyonlarının grafiğiyle gösterilirler. (Şekil 2, U ve U' bulanık kümelerinin venn seması olarak değil, sadece bulanıklığı vurgulamak için verilmiştir). Örneğin, *u(x)* = “x gençtir” ve *v(x)* = “x yaşlıdır” bulanık açık önermeleri, *E*=[0,120] evrensel kümesinde, sırasıyla U gençler ve V yaşlılar bulanık kümelerini oluştursunlar. Bunların üyelik fonksiyonlarının grafiklerine bir örnek Grafik 1’de verilmiştir.



Grafik 1. Genç ve yaşlılar bulanık kümeleri

Bu grafiğe göre, 30 yaşındaki birisi 0.2 üyelik derecesi ile V yaşlılar bulanık kümesine ait ve 0.7 üyelik derecesi ile de U gençler bulanık kümesine aittir. Burada yaş kavramı genç ve yaşlı iki bulanık küme üzerinde incelenmiştir, bumu istediğimiz kadar çoğaltabiliriz. Örneğin, “genç”, “orta yaş”, “yaslı” olarak üç bulanık kümede veya “çok genç”, “genç”, “orta yaş”, “yaşlı”, “çok yaşlı” gibi beş bulanık kümede inceleyebilirdik. Örneğin, “genç”, “orta yaş” ve “yaşlı” kişilerin oluşturduğu *U, V* ve *W* bulanık kümelerinin grafiği Grafik 2’deki gibi verebiliriz.

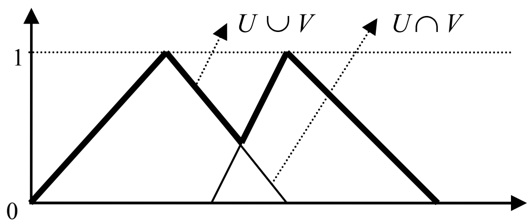


Grafik 2. Genç, orta ve yaşlılar bulanık kümleri

Biz burada, hesaplama açısından getirdiği kolaylıkları göz önüne alarak, üyelik fonksiyonlarının inşasında doğrusal fonksiyonlar kullandık. (1)'deki şartı sağlayan parabolik, hiperbolik, çan eğrisi gibi her türlü fonksiyonlar kullanılabilir. Hangi fonksiyonun daha uygun olup olmayacağı çalışılan uygulama alanı tarafından elde edilen verilere bağlıdır. Bulanık kümeler üzerine kurulan matematiksel yapı, klasik matematikten daha fazla açıklayıcı bir güce sahiptir fakat kullanılabilirliği uygulama alanlarında ortaya çıkan kavramlar için uygun üyelik fonksiyonlarının inşa edilmesine bağlıdır. Yani, bulanık kümelerin kullanışlılığı farklı kavramlara uygun üyelik derecesi fonksiyonlarını oluşturabilme becerimize bağlıdır. Buda bulanık küme teorisinin pratik faydasını artıran en önemli yönlerinden biridir.

Klasik kümeler üzerinde tanımlanan temel işlemlerden olan birleşim ve kesişim işlemleri bulanık kümeler üzerinde maksimum ve minimum fonksiyonları kullanılarak tanımlanmıştır. Bunun matematiksel doğruluğunun yanında insan düşüncesine yatkınlığı da görülmektedir. Her hangi bir kimsenin birden çok bulanık önermeler kullanarak akıl yürüteceğini varsayalım. Eğer önermelerin hepsi "veya" bağlacıyla bağlı ise ortak doğruluk değeri olarak, doğruluk durumuna olabildiğince yakın olmak isteneceğinden, önermeler içinde doğruluk değeri maksimum olanınki seçilecektir. Eğer önermelerin hepsi "ve" bağlacıyla bağlı ise ortak doğruluk değeri olarak, en kötü durum bilinmek isteneceğinden, önermeler içinde doğruluk değeri minimum olanınki seçilecektir.

E evrensel kümesinde verilen herhangi iki bulanık *U* ve *V* kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla $\forall x \in E$ için $\mu_{U\cap V}(x)=\min[\mu_U(x), \mu_V(x)]$ ve $\mu_{U\cup V}(x)=\max[\mu_U(x), \mu_V(x)]$ olarak tanımlanırlar ve Grafik 3 bunların bir olası grafik gösterimi verilmiştir.



Grafik 3. *U* ve *V* kümelerinin bileşim ve kesisimleri

Bunların kapsama ve eşitliği direkt üyelik elemanlarının derecelerine bağlıdır, yani $\forall\ x \in E$ için $\mu_U(x) \le \mu_V(x)$ ise $U \subseteq V$ olur, benzer şekilde $\mu_U(x) = \mu_V(x)$ ise $U=V$ olur. *E* evrensel kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir bulanık *U* kümesinin tümleyeninin üyelik fonksiyonu da $\forall x \in E$, $\mu_{U'}(x) = 1 - \mu_U(x)$ biçiminde tanımlanır. Grafik 1'de açık şekilde görüldüğü gibi *U* bulanık kümesinin tümleyeni *V* bulanık kümesidir, gerçekten de $\mu_U(x) = 1 - \mu_V(x)$ olur. Bulanık kümelerde tanımlanan işlemler tek türlü değildir. Burada tanımlananlar mühendislik uygulamalarında en sık kullanılan işlemlerdir.

Klasik kümeler teorisinden bilinen küme işlemlerinin özellikleri, iki özellik dışında, bulanık kümeler için de geçerlidir. Klasik kümeler için sağlanan $U \cup U' = E$ ve $U \cap U' = \varnothing$ bu iki özellik bulanık küme teorisinin en önemli ayırt edici karakteristiğini ortaya koyarlar ve bulanık kümeler için geçerli değillerdir. Çünkü, her ne kadar üyelik değerleri olasılıkta olduğu gibi [0,1] aralığında değer aslada bir bulanık kümenin elemanlarının üyelik dereceleri toplamı olasılıkta olduğu gibi bu aralıkta bulunma zorunluluğu yoktur. Hatta bir kümenin bu eşitliklerden ne kadar saptığı bulanıklığının ölçüsüdür.

Dikkat edilirse, standart işlemlerin üyelik derecelerinin alacağı değerler $\{0,1\}$ değerlerine kısıtlandığı takdirde klasik küme işlevi görürler. Gerçekten, E evrensel kümesinde herhangi bir klasik A kümesini

$$A=\{(x,\chi_A(x)) : x\in E, \chi_A(x)\in\{0,1\}\} \qquad \textbf{(2)}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Bu (2) tanımına göre bütün bulanık küme işlemleri klasik kümeler için de geçerli olurlar.

Fen bilimlerinden sosyal bilimlere, uygulamaları sayesinde son zamanlarda adından çok söz ettiren bulanık kümeler, doğal dildeki belirsiz ve bulanık kavramları temsil etmemize ve onları matematiksel olarak ifade etmemizi mümkün kılarlar. Uygulama alanlarının genişliği ve bu alanlarda oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından bulanık küme teorisi bugün bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır. Bulanık kümeler, bulanık mantık kavramlarını uygulama algoritmalarına dönüştüren önemli araçlardır. Bulanık mantık algoritmasının kullanımı, makinelere belirli bulanık kavramları anlama ve buna yanıt verme olanağı sağladığından, bulanık mantığın önemli hedeflerinden biri, kullanıldığı makinelerin insan gibi düşünmesini sağlamaya çalışmasıdır.

Bulanık mantık ve kümeleri konusunda daha geniş bilgi için, klasikleşmiş İngilizce kaynak olarak [1,4,7] kitapları ve Türkçe olarak da [2,3,5,6] kitapları tavsiye edilebilir.

Kaynaklar

[1] **Dubois, D. and Prade, H.** *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications,* Academic Press, New York. 1980.
[2] **Elmas, Ç.**, Bulanık Mantık Denetleyiciler, Seçkin, Ankara, 2003.
[3] **İbrahim, A,** Gömülü Sistemlerle Bulanık Mantık (Çeviri: N. Çervatoğlu), Bileşim Yayınevi, İstanbul, 2004.
[4] **Klir, J. G, and Folger, T. A.**, *Fuzzy Sets, And Information,* New Jersey, 1988.
[5] **Şen, Z.,** *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*, Bilge Kültür Sanat, İstanbul, 2001.
[6] **Şen, Z.,** *Modern Mantık*, Bilge Kültür Sanat, İstanbul, 2003.
[7] **Zimmermann, H.J.**, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer, 1991.